Topologia
Lista 0

Niech para (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Podzbiór $A \subset X$ nazywamy *zbiorem otwartym* w przestrzeni (X, ρ), jeśli

$$\forall_{x \in A}\ \exists_{r>0}\ \ K(x, r) \subset A.$$

Rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni (X, ρ) oznaczamy symbolem τ_ρ (lub krócej τ) i nazywamy ją *topologią przestrzeni metrycznej* (X, ρ).

Zad 1. Sprawdzić które z podzbiorów płaszczyzny euklidesowej, tj. pary $(\mathbb{R}^2, \rho)$, gdzie ρ jest metryką euklidesową, są otwarte:

$$A = \{(x, y) : a < x < b\}; \qquad B = \{p\}, \qquad C = \{tp + (t-1)q : t \in (0, 1)\}; p, q \in \mathbb{R}^2,$$

$$D = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}, \qquad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \text{ gdzie } E_n = \{(x, y) : n < x^2 + y^2 < n + 1\}.$$

Zad 2. Wykazać, że w dowolnej przestrzeni metrycznej kula otwarta jest zbiorem otwartym.

Zad 3. Niech (X, ρ) będzie dowolną przestrzenią metryczną i τ topologią wyznaczoną przez ρ. Wykazać, że

(O1) $\emptyset \in \tau$ i $X \in \tau$,

(O2) jeśli $U_1, U_2 \in \tau$, to $U_1 \cap U_2 \in \tau$,

(O3) jeśli $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$, to $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Zad 4. Pokazać na przykładzie, że iloczyn nieskończonej ilości zbiorów otwartych nie musi być zbiorem otwartym.

Przestrzenią topologiczną nazywa sie parę (X, τ), gdzie X jest dowolnym zbiorem, a $\tau \subset 2^X$ jest rodziną podzbiorów X spełniającą warunki (O1), (O2), (O3) z zadania 3. Rodzina τ nazywana jest *topologią* na X. Zbiory $A \in \tau$ nazywane są *zbiorami otwartymi*, natomiast zbiory postaci $X \setminus A$, gdzie $A \in \tau$, nazywane są *zbiorami domkniętymi*.

Zad 5. Czy topologię można zadać na dowolnym zbiorze?

Zad 6. Które z podanych rodzin stanowią topologię na zbiorze $X = \{a, b, c\}$:
a) $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$,
b) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$,
c) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$,
d) $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$.

Zad 7. Które z podanych rodzin stanowią topologię na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$:
a) $\tau = \{A \subset \mathbb{N} :$ zbiór $\mathbb{N} \setminus A$ jest skończony lub $A = \emptyset\}$,
b) $\tau = \{A \subset \mathbb{N} :$ zbiór A jest skończony lub $A = \mathbb{N}\}$.

Zad 8. Podać przykład przestrzeni topologicznej *niemetryzowalnej*, to jest takiej w której topologia nie pochodzi od metryki.

Zad 9. Pokazać, że w każdej przestrzeni topologicznej metryzowalnej zbiór jednoelementowy jest domknięty.